Chapitre n° 10: Fonctions trigonométriques

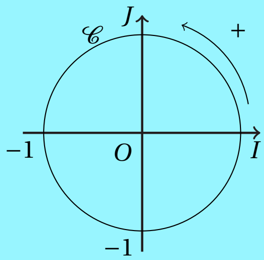
Terminale, 2021-2022

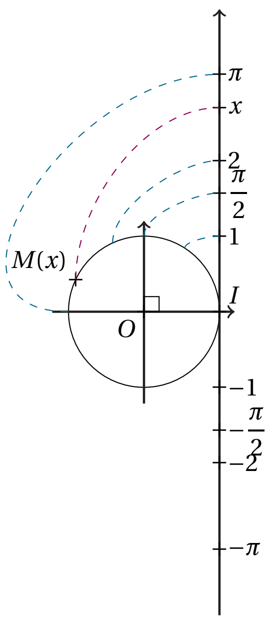
1 Repérage sur un cercle trigonométrique

Définition 1 (Cercle trigonométrique)

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
Le **cercle trigonométrique** $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une orientation :

- ⋆ le sens **direct** (ou positif ou encore **trigonométrique**) est contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre ;
- ⋆ le sens **indirect** (ou négatif) est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

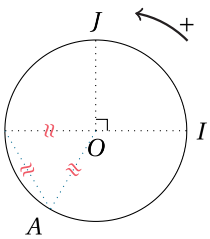




Propriété 2

Pour **repérer un point M du cercle trigonométrique**, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I.
On peut alors associer, au point M, un réel x, abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M.

Remarque 1.
- ⋆ Lorsqu'on enroule l'axe dans le sens **direct**, ce sont des points d' **abscisses positives** qui se superposent à M, dans le sens **indirect**, ce sont des points d'**abscisses négatives**.
- ⋆ Tout point sur le cercle trigonométrique se repère par **plusieurs nombres réels**, distants d'un multiple de 2π, selon le nombre de tours complets de l'enroulement de l'axe.



Exemple 1. Lire l'abscisse associée à un point
Donner un nombre associé aux points J et A sur le cercle trigonométrique ci-contre tels que $\widehat{IOJ} = 90°$ et $\widehat{IOA} = 120°$.

$\widehat{IOJ} = 90°$ donc $\overset{\frown}{IJ}$ mesure un quart de la longueur du cercle dans le sens positif.
$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc un nombre associé à J est $\frac{\pi}{2}$.
Tout nombre de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est associé à ce même point J.

$\widehat{IOA} = 120°$ donc $\overset{\frown}{IA}$ mesure un tiers de la longueur du cercle dans le sens négatif.
Donc un nombre associé à A est $-\frac{2\pi}{3}$.
Tous les nombres associés à A s'écrivent sous la forme $-\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2. Placer un point sur un cercle

Tracer un cercle trigonométrique et placer les points associés aux réels π ; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

La longueur d'un cercle de rayon r est donnée par la formule : $\mathscr{L} = 2\pi r$.

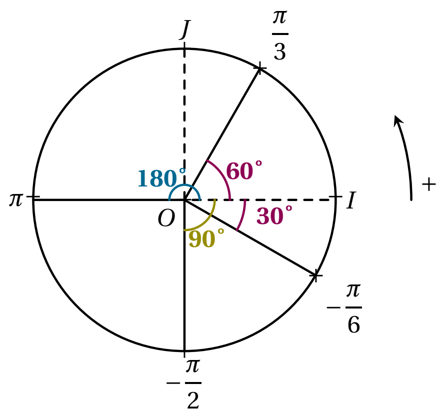
Pour le cercle trigonométrique, cette longueur est donc de 2π, car $r = 1$.

Le nombre π correspond à un parcours d'un demi-cercle dans le sens positif soit 180°.

Le nombre $-\frac{\pi}{2}$ correspond à un parcours d'un quart de cercle dans le sens négatif soit 90°.

Le nombre $\frac{\pi}{3}$ correspond à un parcours d'un sixième de cercle dans le sens positif soit 60°.

Le nombre $-\frac{\pi}{6}$ correspond à un parcours d'un douzième de cercle dans le sens négatif soit 30°.



Définition 3 (radian)

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique te M un point du cercle.
La mesure **en radian** de l'angle $\widehat{IOM}$ est la longueur d'arc $\overset{\frown}{IM}$ intercepté par cet angle.
Le symbole associé à cette unité de mesure est **rad**.

Remarque 2. ① $360° = 2\pi$ rad, $180° = \pi$ rad, $60° = \frac{\pi}{3}$ rad

② toujours veiller au paramétrage de sa calculatrice (degré ou radian)

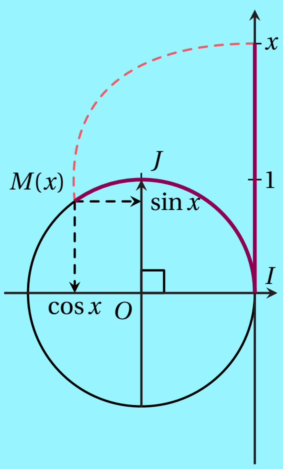
2 Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

Définition 4 (Sinus, cosinus et tangente)

On considère le cercle trigonométrique dans un repère $(O; I, J)$.

- ⋆ Pour tout nombre x, le **cosinus** et le **sinus** de x, notés $\cos x$ et $\sin x$, sont les coordonnées du point M du cercle associé à x. On écrit alors $M(\cos x; \sin x)$.
- ⋆ Pour tout nombre $x \neq \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ (avec k entier relatif), la **tangente** du nombre x est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$



Propriété 5

Pour tout nombre réel x :

$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ $\qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $\qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Preuve. Dans les conditions de la définition, comme le repère est orthonormé, on peut utiliser la formule suivante :

$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}$ soit $OM = \sqrt{(\cos x - 0)^2 + (\sin x - 0)^2}$

d'où $OM^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$.

Or, le cercle trigonométrique est de rayon 1, donc $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

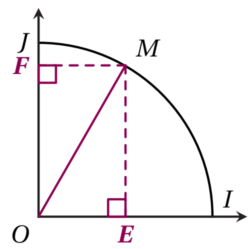
Remarque 3. Pour simplifier l'écriture, on peut utiliser $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Remarque 4.

Pour x un nombre de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, l'angle $\widehat{IOM}$ est un angle aigu. À partir de la figure ci-contre, dans le triangle OME rectangle en E, on a :

$\cos \widehat{EOM} = \dfrac{OE}{OM} = OE = \cos x$ d'où $\cos x = \cos \widehat{IOM}$.

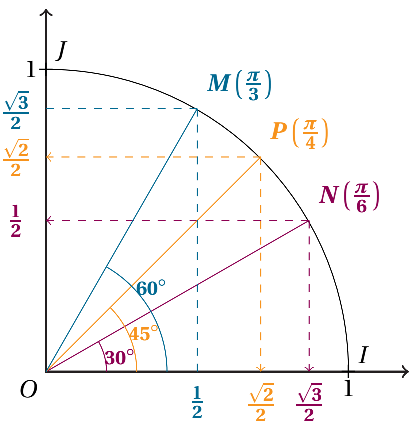
$\sin \widehat{EOM} = \dfrac{ME}{OM} = ME = OF = \sin x$ d'où $\sin x = \sin \widehat{IOM}$.



Propriété 6 (Valeurs remarquables)

angle $\widehat{IOM}$	0	30°	45°	60°	90°
réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x **cos $\widehat{IOM}$**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x **sin $\widehat{IOM}$**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

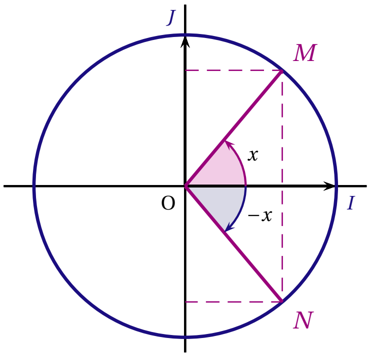
Le graphique ci-dessous permet de visualiser les valeurs remarquables résumées du tableau.



Preuve. sur cahier

Pour tout réel x :

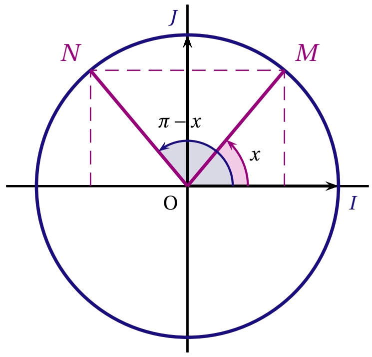
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x\\ \sin(-x) &= -\sin x\end{aligned}}$$



M et N sont symétriques par rapport à (OI)

Pour tout réel x :

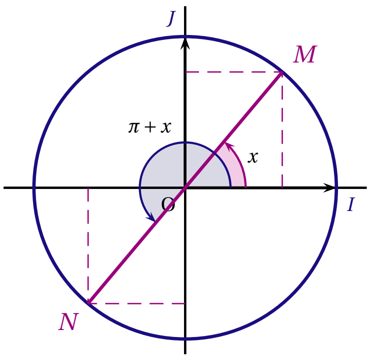
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi-x) &= -\cos x\\ \sin(\pi-x) &= \sin x\end{aligned}}$$



M et N sont symétriques par rapport à (OJ)

Pour tout réel x :

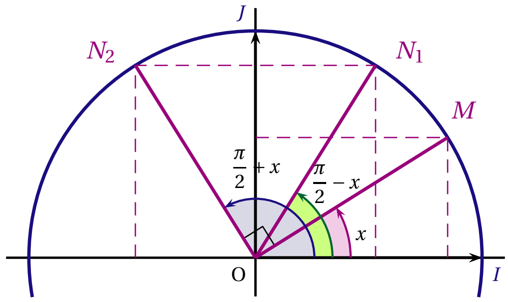
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi+x) &= -\cos x\\ \sin(\pi+x) &= -\sin x\end{aligned}}$$



M et N sont symétriques par rapport à O

Pour tout réel x :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \cos x\end{aligned}}$$



M et N_1 sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

N_1 et N_2 sont symétriques par rapport à (OJ).

Exemple 3. ① $\cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

② $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\sin\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\dfrac{9\pi}{2}+4\pi\right) = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x$

3 Équations trigonométriques

Propriété 7

Soit $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

- ⋆ $\cos\alpha = \cos\beta \iff \exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \beta+2k\pi$ **OU** $\alpha = -\beta+2k\pi$
- ⋆ $\sin\alpha = \sin\beta \iff \exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \beta+2k\pi$ **OU** $\alpha = \pi-\beta+2k\pi$

Exemple 4. ⋆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⋆ Résoudre dans $]2019\pi;2021\pi]$ l'équation $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

⋆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

4 Fonctions cosinus et sinus

Définition 8 (Fonctions cosinus et sinus)

- ⋆ La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos : x \mapsto \cos x$.
- ⋆ La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin : x \mapsto \sin x$.

Définition 9 (Fonction périodique)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un réel T.
f est **périodique** de période T ou est T-périodique si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Définition 10 (Fonctions paire et impaire)

Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ symétrique par rapport à 0.

- ⋆ Une fonction f est **paire** si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- ⋆ Une fonction f est **impaire** si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 11

- ⋆ Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.
- ⋆ La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

Preuve. Pour tout réel x, on a en effet :

- ⋆ $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
- ⋆ $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Remarque 5. ⋆ Dans un repère, les courbes représentatives de cos et sin « se répètent » tous les 2π.

- ⋆ Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de sin est symétrique par rapport à l'origine du repère.

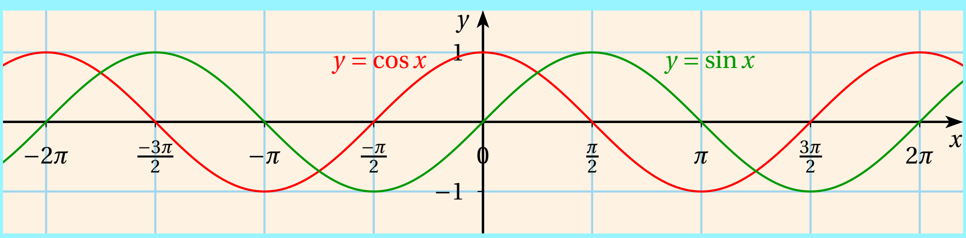
Propriété 12

- ⋆ Les variations des fonctions cos et sin sur $[0\ ;\ \pi]$ sont données par les tableaux ci-contre.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↗	1 ↘	0

- ⋆ Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des **sinusoïdes**.



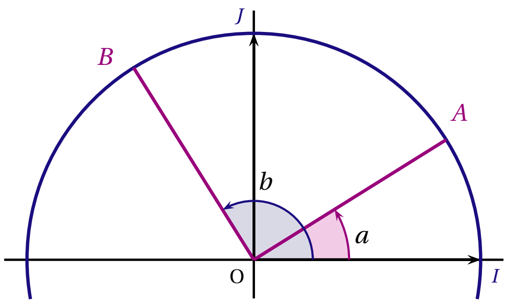
5 Dérivées des fonctions trigonométriques

Propriété 13 (Formules de duplication)

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

- ⋆ $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- ⋆ $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- ⋆ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\sin(x)$
- ⋆ $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x)$

Preuve.



Démontrons la deuxième propriété, les autres en découlent en remplaçant y par $-y$, $\frac{\pi}{2} - y$, ou $\frac{\pi}{2} + y$.
Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et A et B les points du cercle trigonométrique associés respectivement à a et b.

On a donc $A(\cos a; \sin a)$ et $B(\cos b; \sin b)$.
D'une part $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \cos(b-a) = \cos(a-b)$
D'autre part, le repère étant orthonormé, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
On a donc $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Propriété 14 (dérivées)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$

Preuve. En exercice guidé

6 Équations et inéquations trigonométriques)

Voir page 272 du livre